Chapitre 4 – Représentation d'état

Partie 2

1. RELATION AVEC LA FONCTION DE TRANSFERT

- Continu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$[sI - A]X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) + DU(s)$$
$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D}$$

Stabilité → pôle de $G(s)$, i.e. les valeurs de s pour que $G(s) \to \infty$.

$$G(s) = C\frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}B + D$$

Les pôles de $G(s)$ sont donc les valeurs de s qui font que $\det[sI - A] = 0$.

Pôles de $G(s)$ → valeurs propres de A.

- Discret :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$
$$[zI - A]X(z) = BU(z)$$
$$X(z) = [zI - A]^{-1} BU(z)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$
$$Y(z) = C[zI - A]^{-1} BU(z) + DU(z)$$
$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = C[zI - A]^{-1} B + D}$$

Stabilité → Même analyse qu'en continu. Pôles de $G(z)$ → valeurs propres de A.

2. PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT

- Retards :
  - En continu : ne peuvent être représentés.
  - En discret : par des z^{-1}

- Nombre d'états :
  - Σ des ordres des sous-procédés + $\underbrace{\Sigma \text{ des retards (-1)}}_{\text{syst. discrèts seulement}}$

    Pour systèmes discrets, mettre la FT en puissance de z (et pas en z^{-1})

$$G(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N_d(z)}{D_d(z)}z^{-d}=\frac{\left(b_0+b_1z+\ldots+b_{n_a}z^{n_a}\right)z^{-d}}{a_0-a_1z-\ldots-a_{n_a}z^{n_a}}$$

- Si $n_a=0\rightarrow d$ états
- Si $n_a>0$ et si $N(z)$ et $D(z)$ sont du même degré $\rightarrow n_a+d$ états
- Si $n_a>0$ et si $N(z)$ et $D(z)$ ne sont pas du même degré $\rightarrow n_a+d-1$ états

- <u>Exemple</u> :

$$\frac{2z^{-3}}{1-0.8z^{-1}}=\frac{2}{z^3-0.8z^2}=\frac{2z}{z-0.8}z^{-3}\rightarrow \begin{matrix} n_a=1 \\ d=3 \end{matrix}\rightarrow 3+1-1=3 \text{ états}$$

- États :
  - En continu : sont les sorties d'un intégrateur $1/s$.
  - En discret : sont les sorties d'un retard z^{-1}.
  - Un état ne peut pas bouger de façon discontinue (à moins d'impulsions pour les systèmes continus).

- Pour un système sans transmission directe, i.e. $D=0$:
  - En continu : FT $G(s)\rightarrow$ ordre du dénominateur > ordre du numérateur
  - En discret : FT $G(z=0)=0$

- Les états caractérisent l'*état* du système :
  - Leurs valeurs à $t=0$ sont les conditions initiales nécessaires pour calculer l'évolution du système.
  - Se sont la mémoire minimale du système pour pouvoir le simuler.

- Pour un même système, il existe une infinité de représentations d'états .
  - Si possible, prendre la représentation dont les états ont une signification physique.

- Les valeurs propres de la matrice A sont les pôles du système.

- Mêmes équations d'état en monovariable qu'en multivariable.

- SISO : $\begin{aligned}\overbrace{x(k+1)}^{\text{scalaire}}&=\overbrace{A}^{\text{sc.}}\overbrace{x(k)}^{\text{sc.}}+\overbrace{B}^{\text{sc.}}\overbrace{u(k)}^{\text{sc.}}\\ \underbrace{y(k)}_{\text{sc.}}&=\underbrace{C}_{\text{sc.}}\underbrace{x(k)}_{\text{sc.}}+\underbrace{D}_{\text{sc.}}\underbrace{u(k)}_{\text{sc.}}\end{aligned}$ → même chose en continu

- MIMO : $\begin{aligned}\overbrace{x(k+1)}^{\text{vecteur}}&=\overbrace{A}^{\text{mx.}}\overbrace{x(k)}^{\text{vc.}}+\overbrace{B}^{\text{mx.}}\overbrace{u(k)}^{\text{vc.}}\\ \underbrace{y(k)}_{\text{vc.}}&=\underbrace{C}_{\text{mx.}}\underbrace{x(k)}_{\text{vc.}}+\underbrace{D}_{\text{mx.}}\underbrace{u(k)}_{\text{vc.}}\end{aligned}$ → même chose en continu

3. **MATRICE DE TRANSITION**

- Comment calculer $x(t)$ pour une entrée $u(t)$ à partir de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ avec conditions initiales $x(t_0) = x_{t_0}$?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

Multiplie Eq.(1) par e^{-At} :

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}\left(Ax(t) + Bu(t)\right)$$

$$e^{-At}\left(\dot{x}(t) - Ax(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

Changement de variable $t \to \tau$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right] = e^{-A\tau}Bu(\tau) \quad (2)$$

Intègre Eq.(2) de t_0 à t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\ x(t) &= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \end{aligned}}$$

où $\Phi(t) = e^{At}$ est la matrice de transition des états.

L'expression

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\substack{\text{réponse naturelle} \\ \text{(rép. aux c. i. avec } u=0) \\ \downarrow \\ \text{solution homogène}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}_{\substack{\text{réponse forcée} \\ \downarrow \\ \text{solution particulière}}}$$

permet de calculer $x(t)$ pour une entrée $u(t)$.

- Comment calculer e^{At} ?

Pour $u(t)=0$ et c. i. $x(t_0=0)=x(0)$,

$$\dot{x}(t)=Ax(t)$$
$$sIX(s)-X(0)=AX(s)$$
$$X(s)=[sI-A]^{-1}X(0)$$
$$x(t)=x(0)\mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1}$$

On sait que pour $u(t)=0$ et $x(0)$

$$x(t)=e^{At}x(0)$$

donc

$$\boxed{e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1}}$$

- <u>Exemple</u> :

$$A=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -0.5 & -1\end{bmatrix}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s+0.5 & 0\\ 0.5 & s+1\end{bmatrix}$$

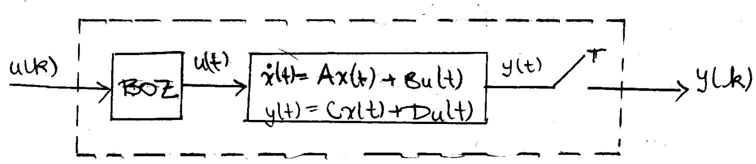
$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{(s+0.5)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -0.5 & s+0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+0.5} & 0\\ \underbrace{\dfrac{-0.5}{(s+0.5)(s+1)}}_{\text{décomposition en fraction partielles}} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+0.5} & 0\\ \dfrac{-1}{s+0.5}+\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}e^{-0.5t} & 0\\ -e^{-0.5t}+e^{-t} & e^{-t}\end{bmatrix}=e^{At}=\Phi(t)$$

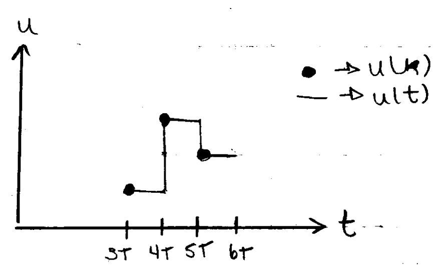
4. <u>DISCRÉTISATION</u>

continu | période d'échant. T | discret

$A,B,C,D \quad \Leftrightarrow \quad A_d,B_d,C_d,D_d$



$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$
$y(k)=Cx(k)+Du(k)$



Discrétisation sur une période : temps initial → $t_0=kT$, temps final → $t=(k+1)T$

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x((k+1)T)=e^{A((k+1)T-kT)}x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Changement de variable :

$$\alpha = (k+1)T - \tau \qquad\qquad \text{pour } \tau = kT \rightarrow \alpha = T$$

$$\tau = (k+1)T - \alpha \qquad \rightarrow \qquad \text{pour } \tau = (k+1)T \rightarrow \alpha = 0$$

$$d\tau = -d\alpha \qquad\qquad u(\tau) = u(\alpha) = \text{cste} = u$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_T^0 e^{A\alpha}Bu(\alpha)(-1)\,d\alpha$$

$$= e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\alpha}Bu(\alpha)\,d\alpha$$

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \left[\int_0^T e^{A\alpha}B\,d\alpha\right]u(k)$$

Donc,

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) & y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \\ \quad A_d = e^{AT} = \Phi(T) & \quad C_d = C \\ \quad B_d = \int_0^T e^{A\alpha}B\,d\alpha & \quad D_d = D \end{array}}$$

5. IMPLANTATION SUR ORDINATEUR

Simulation d'un système discret SISO:

```
A = ...  % Matrice d'évolution du système
B = ...  % Matrice de commande
C = ...  % Matrice d'observation
D = ...  % Matrice de transmission directe

X = ...  % Vecteur d'états initiaux
u = ...  % L'entrée sur toute la simulation (vecteur de longeur i)

for i = 1:N,
    y(i) = C*x + D*u(i);
    x = A*x + B*u(i);
end
```

Passage de FT continue → RE continue → FT discrète:

```
T = 0.3;                  % Période d'échantillonnage

G = tf(1,[1 2 1]);        % FT continue G = 1/(s^2 + 2s + 1)
G = ss(G);                % RE continue G --> G.a, G.b, G.c, G.d
Gd = c2d(G,T,'zoh');      % RE discrète Gd --> Gd.a, Gd.b, Gd.c, Gd.d
step(G,Gd);               % Réponse à l'échelon (continu & discret)
```

Passage de FT continue → FT discrète → RE discrète:

```
T = 0.3;                     % Période d'échantillonnage

G = tf(1,[1 2 1]);           % FT continue G = 1/(s^2 + 2s + 1)
Gd = c2d(G,T,'zoh');         % FT discrète (ZOH-> proc, TUSTIN-> régul)
[Gdnum,Gdden] = tfdata(Gd); % FT discrète (num & den)
[A,B,C,D] = tf2ss(Gdnum{1},Gdden{1}); % RE discrete
```

6. **CHANGEMENT DE BASE**

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Même système car $x(k) = Tz(k)$

$x(k) = Tz(k) \qquad \det(T) \neq 0$ → matrice pas singulière

$$Tz(k+1) = ATz(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = CTz(k) + Du(k)$$

$$z(k+1) = \underbrace{T^{-1}AT}_{A_z} z(k) + \underbrace{T^{-1}B}_{B_z} u(k)$$
$$y(k) = \underbrace{CT}_{C_z} z(k) + \underbrace{D}_{D_z} u(k)$$

→ Infinité de représentations possible pour le même système

$$\begin{aligned}
\det(zI - A_z) &= \det\left(zT^{-1}T - T^{-1}AT\right) \\
&= \det\left(T^{-1}(zI - A)T\right) \\
&= \det\left(T^{-1}\right)\det(zI - A)\det(T) \\
&= \det\left(T^{-1}\right)\det(zI - A)\frac{1}{\det\left(T^{-1}\right)} \\
&= \det(zI - A)
\end{aligned}$$

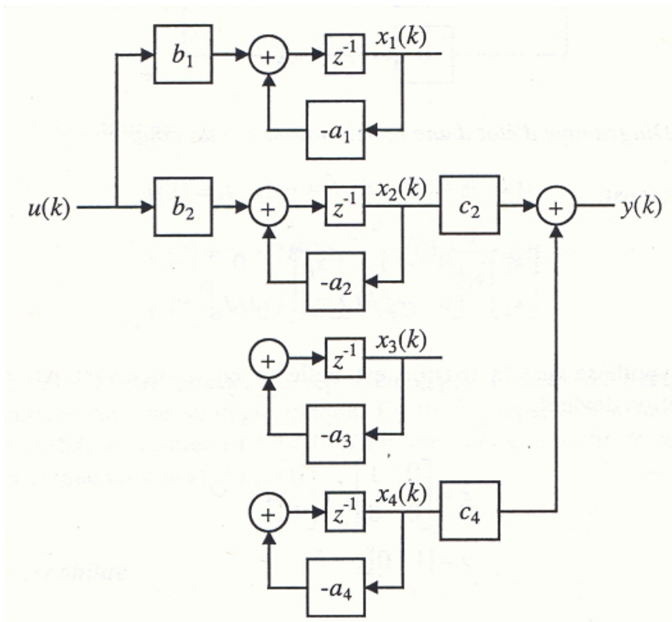
→ Même pôles évidement!

7. **OBSERVABILITÉ ET GOUVERNABILITÉ (CONTRÔLABILITÉ)**

- Définitions:
  - ***Gouvernabilité***: Un système est dit gouvernable si, par application d'une une commande convenable, on peut amener en un temps fini tout état d'une valeur à une autre valeur.
  - ***Observabilité***: Un système est dit observable si, de l'observation de la sortie et de la connaissance de l'entrée pendant un temps fini, on peut déduire les valeurs initiales de tous les états.

Exemple 4.8 **:**

Soit le procédé monovariable



dont l'équation d'état est

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

On constate que :

- L'état x_1 est gouvernable, mais non observable
- L'état x_2 est gouvernable et observable
- L'état x_3 est ni gouvernable ni observable
- L'état x_4 est non gouvernable, mais observable

- Observable?

$y(n) = Cx(n)$, $n =$ nombre d'états

Peut-on déduire l'état initial $x(1)$ à partir de $y(i)$ et $u(i)$ pour $i = 1 \rightarrow n$?

$$
\begin{aligned}
y(1) &= Cx(1) \\
y(2) &= Cx(2) \\
&= CAx(1) + CBu(1) \\
y(3) &= CAx(2) + CBu(2) \\
&= CA\left[Ax(1) + Bu(1)\right] + CBu(2) \\
&= CA^2x(1) + CABu(1) + CBu(2) \\
&\vdots \\
y(n) &= CA^{n-1}x(1) + CA^{n-2}Bu(1) + CA^{n-3}Bu(2) + \ldots + CABu(n-2) + CBu(n-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(1) + \underbrace{V}_{\text{vecteur connu}} \quad \rightarrow \quad x(1) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} - V \right)
$$

Le système est donc observable si $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ est de $\underbrace{\text{plein rang}}_{\text{rang } n}$ (i.e. inversible).

- <u>Gouvernable?</u>

Peut-on trouver les $u(0) \rightarrow u(n-1)$ pour que $x(n)$ soit à une valeur désirée sachant qu'il est parti de $x(0)$?

$$
\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
&= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= A^2x(1) + ABu(1) + Bu(2) \\
&= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots \\
x(n) &= A^nx(0) + A^{n-1}Bu(0) + \ldots + ABu(n-2) + Bu(n-1)
\end{aligned}
$$

$$x(n)=A^n x(0)+\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(n-1)\\ u(n-2)\\ \vdots \\ u(0)\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u(n-1)\\ u(n-2)\\ \vdots \\ u(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}^{-1}\left(x(n)-A^n x(0)\right)$$

Le système est donc gouvernable si $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ est de $\underbrace{\text{plein rang}}_{\text{rang } n}$ (i.e. inversible).

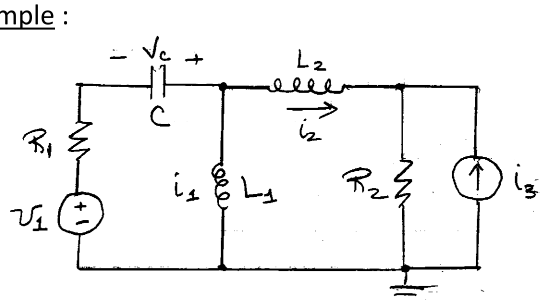
8. REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET CIRCUITS

États on un sens physique :

- Tension aux bornes des condensateurs
- Courant dans les inductances

➢ Variables dont les valeurs initiales doivent être connues pour résoudre le circuit.

Exemple :



états : v_c, i_1, i_2

$$C\frac{dv_c}{dt}+i_1+i_2=0$$

$$-v_1+R_1(i_1+i_2)-v_c+L_1\frac{di_1}{dt}=0$$

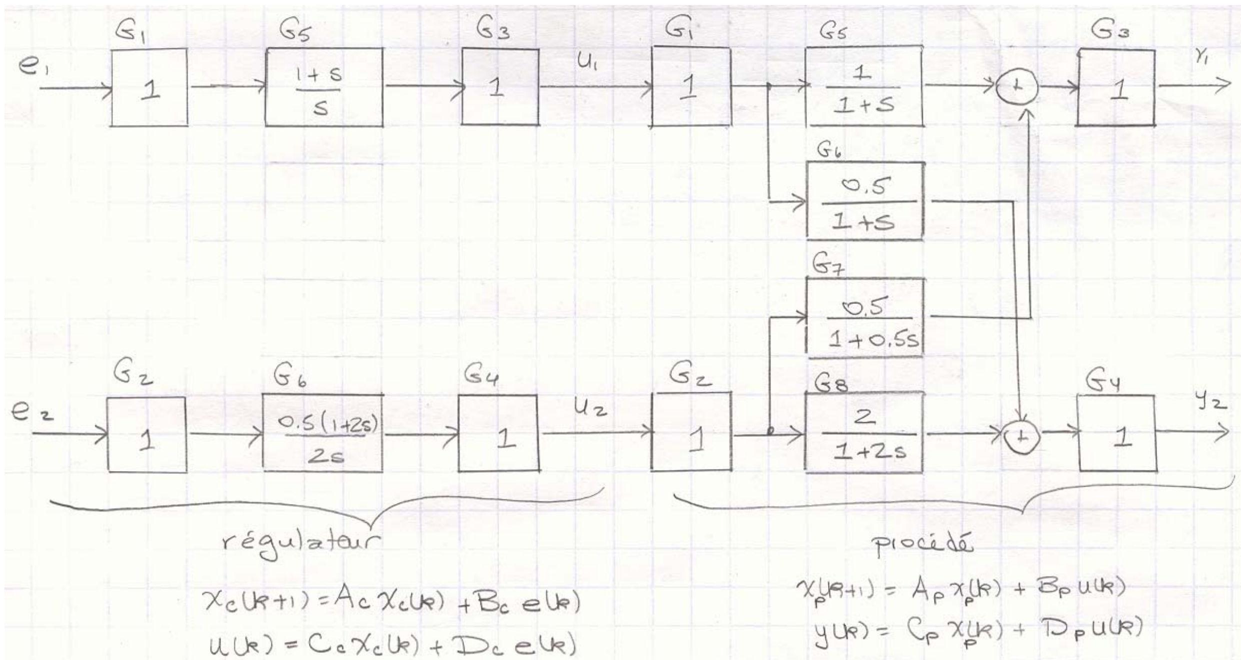
$$-v_1+R_1(i_1+i_2)-v_c+L_2\frac{di_2}{dt}+R_2(i_2+i_3)=0$$

Sous forme d'état :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_c}{dt}\\ \dfrac{di_1}{dt}\\ \dfrac{di_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1/c & -1/c\\ 1/L_1 & -R_1/L_1 & -R_1/L_1\\ 1/L_2 & -R_1/L_1 & -(R_1+R_2)/L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c\\ i_1\\ i_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1/L_1 & 0\\ 1/L_2 & -R_2/L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ i_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu$$

Exemple : Représentation d'état multivariable



REmult.m

REmult_sim.m